13.4 留数与留数定理

13.4.1 孤立奇点及其类型

13.4.2 留数与留数定理

一、孤立奇点

1、孤立奇点的定义

定义1 若$f(z)$在z_0处不解析，但在z_0的某个去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$内解析，则称z_0为$f(z)$的孤立奇点.

例如 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ ----$z=0$为孤立奇点

$f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ ----$z=1$为孤立奇点

$f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ ----$z=0$不是孤立奇点

$$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$$ ----z=0不是孤立奇点

$z=\dfrac{1}{n\pi}$也是奇点

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\pi}=0,\therefore$ 在$z=0$不论多么小的去心邻域内,

总有$f(z)$的奇点存在

故$z=0$不是$\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$的孤立奇点。

这说明奇点未必是孤立的。

设z_0为$f(z)$的孤立奇点，那么$f(z)$在z_0的某去心邻域

$0<|z-z_0|<R$内可以展为洛朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n \quad =\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n$$

其中幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$在以$z_0$为中心的圆域

内解析(称为解析部分),

所以$f(z)$在z_0点的奇异性完全体现在负幂次项的

级数部分(称为主要部分).

下面就洛朗级数负幂次项部分的情况对孤立奇点进行分类.

定义13.4.2 设z_0为$f(z)$的孤立奇点，且在z_0的去心邻域内洛朗级数展开式有如下三种情况：

（1）若没有负幂次项，则称z_0为$f(z)$的可去奇点；

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

展式中没有负幂次项， 在$0<|z-0|<\delta$内解析

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=c_0, \qquad 令 F(z)=\begin{cases} f(z) & z\neq 0 \\ c_0=1 & z=0 \end{cases}$$

$F(z)$在$|z-0|<\delta$内解析 故称$z=0$为$\dfrac{\sin z}{z}$的可去奇点.

2）若关于$(z-z_0)^{-1}$的最高次幂项为$(z-z_0)^{-m}$，即

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$$

则称z_0为$f(z)$的**m级极点**；

$$\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-2}}{n!}+\cdots$$ 展式中z^{-1}的

最高次幂项为z^{-2}，故$z=0$为$\dfrac{e^z}{z^2}$的二级极点.

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty=\lim_{z\to z_0}f(z)$$

$$\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(1+z+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\right)=\frac{1}{z^2}g(z)$$

$g(z)$在$|z-0|<\delta$内解析，且$g(0)\neq 0$

（3）若 $f(z)$在z_0的某去心邻域内的洛朗级数展开式有无穷个$z-z_0$的负幂次项，则称z_0为$f(z)$的本性奇点

$$e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\cdots+\frac{1}{n!}z^{-n}+\cdots$$

有无穷多负幂次项，故$z=0$为$e^{\frac{1}{z}}$的本性奇点.

对于$\forall$复数A, $\exists$趋于z_0的数列$\{z_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=A$

$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$不存在且不为无穷.

关于孤立奇点类型的判别，我们有如下结论：

定理13.4.1 设$f(z)$在$0<|z-z_0|<\delta$内解析，则

(1) z_0为$f(z)$的可去奇点：展开式中没有负幂次项

存在极限$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$，其中$c_0$为一复常数；

(2) z_0为$f(z)$的极点：展开式中$z-z_0$的负幂次项

有限个$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$

(3) z_0为$f(z)$的本性奇点：展开式有无穷多个

$z-z_0$的负幂次项$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不存在且不为无穷.

$$\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(1+z+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\right)=\frac{1}{z^2}g(z)$$

$g(z)$在$|z-0|<\delta$内解析，且$g(0)\neq 0$

$z=0$是$f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$的二级极点

结论：z_0是$f(z)$的m级极点的充要条件是

$f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$，其中$g(z)$在$z_0$处解析且$g(z_0)\neq 0$

例1　判断函数$f(z)=\dfrac{z^2-3z+2}{(z^2+1)(z-1)^4}$的孤立奇点的类型.

解:　$z=1$和$z=\pm i$为$f(z)$的孤立奇点.

因为$f(z)=\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z^2+1)(z-1)^4}=\dfrac{1}{(z-1)^3}\cdot\dfrac{z-2}{z^2+1}$

其中$g(z)=\dfrac{z-2}{z^2+1}$在$z=1$处解析且$g(1)\neq 0$,

故$z=1$是$f(z)$的三级极点.

类似地, $z=\pm i$ 分别是$f(z)$ 的一级极点.

定义13.4.3 设$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，其中$\varphi(z)$在z_0解析且$\varphi(z_0)\neq 0$，则称z_0是$f(z)$的m级零点.

例如：$f(z)=z(z-1)^3$，则$z=0$和$z=1$分别是$f(z)$的一级与三级零点.

结论： 设$f(z)$在z_0解析，则z_0为$f(z)$的m级零点

$$\Leftrightarrow f^{(n)}(z_0)=0\ \ (n=0,\ 1,\ 2,\cdots,m-1),\ \ f^{(m)}(z_0)\neq 0$$

例2 问$z=0$为$f(z)=z-\sin z$的几级零点?

解: 因为 $f(0)=0$ $f'(z)=1-\cos z$ $f'(0)=0$

$f''(z)=\sin z$ $f''(0)=0$ $f'''(z)=\cos z$

$f'''(0)\neq 0$ 故$z=0$是$f(z)$的三级零点.

零点与极点有如下关系:

定理13.4.2

z_0是$f(z)$的m级极点$\Leftrightarrow$ z_0是$\dfrac{1}{f(z)}$的m级零点

定理2为判断函数的极点及其类型提供了一种较为简便的方法.

例3　函数$\dfrac{1}{\sin z}$有哪些奇点？如果是极点，指出它们为几级极点

解： 凡是使$\sin z=0$的点都是$\dfrac{1}{\sin z}$的奇点

这些奇点是$z=k\pi\ \ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$，且均为孤立奇点。又由于

$$(\sin z)'\Big|_{z=k\pi}=\cos z\Big|_{z=k\pi}=(-1)^k\neq 0$$

所以$z=k\pi\ \ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$都是$\sin z$的一级零点，也就是$\dfrac{1}{\sin z}$的一级极点.

总结．奇点的类型

非孤立奇点：　如：　$z=0$是$\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$的非孤立奇点

孤立奇点的判别法：

(1)按定义：若易展开为Laurent级数，

$$\text{看负幂次项个数:}\begin{cases} 0, & \text{可去奇点} \\ m, & m\text{级极点} \\ \infty, & \text{本性奇点} \end{cases}$$

(2)求极限：$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\begin{cases}\text{有限复常数，可去奇点}\\ \infty\text{，极点}\\ \text{不存在，也非无穷，本性奇点}\end{cases}$

（3）对于极点，还有如下判别法：

若$f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z)$，$\varphi(z_0)\neq 0$且$\varphi(z)$在$z_0$解析

则z_0为$f(z)$的m级极点.

若$f(z)$不易分解出$\dfrac{1}{(z-z_0)^m}$，可转化为求$g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$

的零点：$g(z_0)=g'(z_0)=\cdots=g^{(m-1)}(z_0)=0, g^{(m)}(z_0)\neq 0.$

推广：$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$和$Q(z)$解析，

孤立奇点分类的总结：

1.求出$f(z)$的没有定义的点即为$f(z)$的奇点（一般为$Q(z)$的零点）.

2.若z_0是$Q(z)$的m级零点，但不是$P(z)$的零点，则z_0是$f(z)$的m级极点.

3.若z_0是$Q(z)$的m级零点，是$P(z)$的n级零点，

$$\text{则}\begin{cases} z_0\text{是}f(z)\text{的}m-n\text{级极点，当}m>n\text{时} \\ z_0\text{是}f(z)\text{的可去奇点，当}m\le n\text{时} \end{cases}$$

例1 指出下列孤立奇点的类型。

(1) $\dfrac{z^4-1}{z^2+1}$ $z=\pm i$ 是孤立奇点

$$\because \lim_{z\to\pm i}\frac{z^4-1}{z^2+1}=\lim_{z\to\pm i}(z^2-1)=-2$$

$\therefore z=\pm i$是可去奇点;

(2) $\dfrac{\sin z}{z^2}$ $z=0$是孤立奇点,

$$\because \frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\frac{z^5}{7!}+\cdots$$

$\therefore z=0$是一级极点;

(3) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^5}$ $\quad z=0$是孤立奇点

$\because (1-e^{2z})\Big|_{z=0}=0, (1-e^{2z})'\Big|_{z=0}=-2\neq 0$

$\therefore z=0$是$1-e^{2z}$的一级零点

而$z=0$是z^5的五级零点,

$\therefore z=0$是$\dfrac{1-e^{2z}}{z^5}$的四级极点;

(4) $\dfrac{e^z-1}{z^3+z}$ $z=0, z=\pm i$ 是孤立奇点,

$z=0$和$z=\pm i$分别是z^3+z的一级零点, 而$z=0$是 e^z-1的一级零点，故 $\therefore z=0$是可去奇点;

$\therefore z=\pm i$是一级极点;

(5) $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}=\dfrac{1}{(z-1)^2(z+1)}$

$z=1$是二级极点, $z=-1$ 是一级极点.

13.4.2 留数与留数定理

定义13.4.4 设z_0是$f(z)$的孤立奇点，$f(z)$在z_0去心邻域内的洛朗级数中负一次幂项$(z-z_0)^{-1}$的系数c_{-1}称为$f(z)$在z_0的留数，

记作$\mathrm{Res}[f(z),\ z_0]$，即$\mathrm{Res}[f(z),\ z_0]=c_{-1}$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$$

$$=\cdots+c_{-2}\frac{1}{(z-z_0)^2}+c_{-1}\frac{1}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$$

设z_0是$f(z)$的孤立奇点，$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz=\mathrm{Res}[f(z),\ z_0]$$

定理13.4.3 设曲线C是一条正向简单闭曲线，$f(z)$在C内有有限个孤立奇点$z_1,z_2,\cdots,z_n$，除此以外，$f(z)$在C内及C上解析，则

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),\ z_k]$$

求函数在其孤立奇点处的留数，如果先知道奇点为何种类型，求解会更方便

（1）若z_0为$f(z)$的可去奇点，则$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$

（2）若z_0为$f(z)$的本性奇点，则将$f(z)$在解析域$0 < |z - z_0| < \delta$内展为洛朗级数，其中负一次幂项系数c_{-1}即为所求留数；

（3）若z_0为$f(z)$的极点，则可用下列计算规则求留数.

规则 1　若z_0为$f(z)$的一级极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z),\ z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

规则 2　若z_0为$f(z)$的m级极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z),\ z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}$$

规则 3　设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$及$Q(z)$在z_0都解析

若$P(z_0)\neq 0,\ Q(z_0)=0,\ Q'(z_0)\neq 0$,则

z_0是$f(z)$的一级极点，且 $\operatorname{Res}[f(z),\ z_0]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

例1 计算积分$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz$，$C$为正向圆周$|z|=2$？

解：$f(z)=\frac{z}{z^4-1}=\frac{z}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$

$f(z)=\frac{z}{z^4-1}$在C内有四个一级极点± 1和$\pm i$

$$\mathrm{Res}[f(z),\ 1]=\left.\frac{z}{(z+1)(z-i)(z+i)}\right|_{z=1}=\frac{1}{4}$$

同理求$\mathrm{Res}[f(z),\ -1]=\frac{1}{4}$ $\mathrm{Res}[f(z),\ \pm i]=-\frac{1}{4}$

由留数定理， 原式$=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),1]$

$+\mathrm{Res}[f(z),-1]+\mathrm{Res}[f(z),i]+\mathrm{Res}[f(z),-i]\}=0$

求留数的方法：

（1）先判断奇点类型，若是可去奇点，则留数为 0.

(2) 若是本性奇点, 按定义，展开为Laurent级数后看系数：　$\operatorname{Res}[e^{\frac{1}{z}},0]=1$

(3) 若是极点，可试用如下计算规则：

规则 1　若z_0为$f(z)$的一级极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z),\ z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

规则 2　若z_0为$f(z)$的m级极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z),\ z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}$$

规则3 设z_0为$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$的一级极点，$P(z)$及$Q(z)$

在z_0都解析，$P(z_0)\neq 0,\ Q(z_0)=0,\ Q'(z_0)\neq 0,$

则$\operatorname{Res}[f(z),\ z_0]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

三种规则一般情况下都可以化为一种：先写出

$f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^m}g(z),\ \ g(z_0)\neq 0$且$g(z)$在$z_0$解析

$$\text{则}\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}$$

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z),\quad g(z_0)\neq 0 \text{且} g(z) \text{在} z_0 \text{解析}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{g(z)\}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0} g^{(m-1)}(z)$$

$$=\frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

若$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$符合规则三条件, $Q(z)$不易分解出$z-z_0$,

则只好用规则三:

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

例2 求$\oint_C \frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz$, C为正向圆周$|z|=2$.

解: $f(z)=\frac{5z-2}{z(z-1)^2}$有奇点$z=0$和$z=1$,都在$C$内

$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{5z-2}{(z-1)^2}$ 在C内有一个一级极点$z=0$

$$\mathrm{Res}[f(z),\ 0]=\left.\frac{5z-2}{(z-1)^2}\right|_{z=0}=-2$$

$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{5z-2}{z}$ 在C内有一个二级极点$z=1$

$$\mathrm{Res}[f(z),\ 1]=\frac{\left.\left(\frac{5z-2}{z}\right)'\right|_{z=1}}{(2-1)!}=\lim_{z\to 1}\frac{2}{z^2}=2$$

例2 求$\oint_C \frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz$, C为正向圆周$|z|=2$.

解: $f(z)=\frac{5z-2}{z(z-1)^2}$有奇点$z=0$和$z=1$,都在$C$内

$$\mathrm{Res}[f(z),\ 0]\ =-2$$

$$\mathrm{Res}[f(z),\ 1]\ =2$$

由留数定理,

$$原式=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),\ 0]+\mathrm{Res}[f(z),\ 1]\}=0$$

例2 求$\oint_C \frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz$, C为正向圆周$|z|=2$.

解法二:

$f(z)=\frac{5z-2}{z(z-1)^2}$有奇点$z=0$和$z=1$,都在$C$内

作两条封闭曲线C_1和C_2,C_1和C_2互不相交,

并且C_1仅含$z=0$和C_2仅含$z=1$

根据复合闭路定理:

$$\oint_C \frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz \quad = \oint_{C_1} \frac{\frac{5z-2}{(z-1)^2}}{z}dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{5z-2}{z}}{(z-1)^2}dz$$

例2 求$\oint_C \frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz$，$C$为正向圆周$|z|=2$.

$$\oint_C \frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{5z-2}{(z-1)^2}}{z}dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{5z-2}{z}}{(z-1)^2}dz$$

$$= 2\pi i \left.\frac{5z-2}{(z-1)^2}\right|_{z=0} + 2\pi i \frac{\left.\left(\frac{5z-2}{z}\right)'\right|_{z=1}}{(2-1)!}$$

$$=0$$

例3　计算积分$\oint_C \frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}dz$，$C$为正向圆周$|z|=2$

解：$f(z)=\frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}$在$C$内有两个孤立奇点$z=0$和$z=1$

$z=0$是$\sin^2 z$的二级零点，也是$z^2(z-1)$的二级零点

所以$z=0$是$f(z)$的可去奇点，

或$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}=-1$　　$\therefore\ \mathrm{Re}\,s[f(z),\ 0]=0$

$f(z)=\frac{1}{(z-1)}\cdot\frac{\sin^2 z}{z^2}$　所以$z=1$是$f(z)$的一级极点

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),\ 1]=\lim_{z\to 1}\frac{\sin^2 z}{z^2}=\sin^2 1$$

例3 计算积分$\oint_C \frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}dz$，$C$为正向圆周$|z|=2$.

解：$f(z)=\frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}$在$C$内有两个孤立奇点$z=0$和$z=1$

$$\mathrm{Res}[f(z),\ 0]=0$$

$$\mathrm{Res}[f(z),\ 1]=\sin^2 1$$

由留数定理，

$$\text{原式}=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),\ 0]+\mathrm{Res}[f(z),\ 1]\}=2\pi i\sin^2 1$$

例4　求$\oint_C \dfrac{dz}{z(z+1)(z+4)}$, C为正向圆周$|z|=3$.

解: 在C内被积函数有两个孤立奇点$z_1=0$和$z_2=-1$,

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(z+1)(z+4)}$$ 在C内有一个一级极点$z=0$

$$\operatorname{Res}[f(z),\ 0]=\left.\frac{1}{(z+1)(z+4)}\right|_{z=0}=\frac{1}{4}$$

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)}\cdot\frac{1}{z(z+4)}$$ 在C内有一个一级极点$z=-1$

$$\operatorname{Res}[f(z),\ -1]=\left.\frac{1}{z(z+4)}\right|_{z=-1}=-\frac{1}{3}$$

例4　求$\oint_C \frac{dz}{z(z+1)(z+4)}$，$C$为正向圆周$|z|=3$.

解：在C内被积函数有两个孤立奇点$z_1=0$和$z_2=-1$,

$$\mathrm{Res}[f(z),\ 0]=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),\ -1]=-\frac{1}{3}$$

由留数定理得

$$原式=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),\ 0]+\mathrm{Res}[f(z),\ -1]\}$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{6}\pi i$$

补充：

定理：如果$f(z)$和$g(z)$是以z_0为零点的两个不恒等于0的解析函数，那么

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \qquad \text{(或两端均为}\infty\text{)}$$

本章学习指导

（1） 复数列的极限和复数项级数的收敛性是实数项数列和实级数收敛的推广，复函数在其解析点 z_0 处的幂级数展开也与实函数的幂级数展开类似.

（2）洛朗级数是一个双边幂级数．函数在同一孤立奇点 z_0 为圆心的不同圆环域内的洛朗展式是不同的，只有在 z_0 去心环域内的洛朗展式中负一次幂项系数 c_{-1} 才称为 $f(z)$ 在点 z_0 的留数.

(3) 留数定理把求 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分转化为求 $f(z)$ 在 C 内各孤立奇点处的留数，从而为复积分的计算建立了一种十分重要的方法.